

## LES ENGRENAGES et LES TRAINS D'ENGRENAGES

### 1- Généralités – Définition – But

Les engrenages ont pour fonction de transmettre une puissance d'un arbre en rotation à un autre arbre tournant à une vitesse généralement différente, les deux vitesses restant dans un rapport constant.

Les solutions concurrentes :

- *transmission par accouplement*, les arbres devant être dans le prolongement l'un de l'autre,
- *transmission par friction* : roues de friction, courroies plates ou courroies trapézoïdales sur poulies,
- *transmission par courroie crantée sur poulies ou par chaîne sur roues*.

Pour un prix de revient modéré, les engrenages ont pour avantages un excellent rendement et un encombrement plutôt faible.

L'engrènement est un phénomène connu depuis plusieurs siècles, les moulins à vent utilisaient des engrenages en bois assez perfectionnés, et les mécanismes d'horlogerie ont utilisé très tôt les roues dentées. Le développement des moteurs thermiques et électriques a provoqué un fort développement de ce type de transmission.

Un **engrenage** est un ensemble de deux roues dentées complémentaires, chacune en liaison (pivot ou glissière) par rapport à un support (souvent le bâti).

La petite roue se nomme le **pignon**, la grande roue extérieure s'appelle la **roue**, la grande roue intérieure s'appelle la **couronne**. L'une des roues peut avoir un rayon infini, elle s'appelle alors une **crémaillère**.

Le **rapport de transmission**  $i$  est par définition :

$$i = \frac{\omega_{\text{sortie}}}{\omega_{\text{entrée}}}$$

On appelle **surfaces primitives**, les surfaces fictives des roues de friction associées donnant la même cinématique que l'engrenage.

On distingue les différents types d'engrenages suivant :

- les engrenages à axes parallèles à denture droite ou hélicoïdale,
- les engrenages à axes concourants à denture droite ou hélicoïdale,
- les engrenages à axes non concourants ou gauches (roue-vis, hypoïde, etc.)

### 2- Etude succincte de l'engrènement dans le cas d'un engrenage cylindrique droit

#### 2-1 Les surfaces conjuguées et les profils conjugués (figures 1 & 2)

Soient deux cylindres de révolution primitifs (surfaces axoïdes) d'axes respectifs  $X_1$  et  $X_2$  parallèles et tangents suivant la génératrice  $D$ , une surface  $P$  tangente aux deux cylindres en  $D$  et une surface  $Q$  invariablement liée à  $P$ .

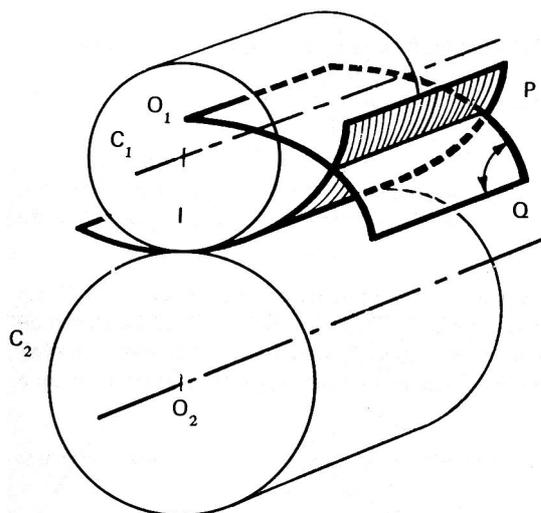


Figure 1

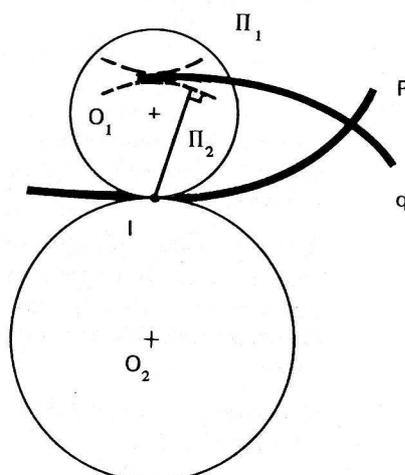


Figure 2

Si  $P$  roule sans glisser sur les deux cylindres, la surface  $Q$  a pour enveloppe par rapport au cylindre 1 une certaine surface  $S_1$  et pour enveloppe par rapport au cylindre 2 une certaine surface  $S_2$ . Ces deux surfaces sont conjuguées, c'est-à-dire qu'elles restent constamment tangentes.

Si on regarde ce qui se passe dans un plan perpendiculaire aux axes des cylindres (les courbes  $p$  et  $q$  étant les traces de  $P$  et  $Q$  dans ce plan), on démontre que la normale commune aux courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  traces respectives de  $S_1$  et  $S_2$  passe toujours par le point de contact des cercles primitifs, point  $I$  qui est le centre instantané de rotation du mouvement de roulement sans glissement de  $p$  sur le cercle 1, du mouvement de roulement sans glissement de  $q$  sur le cercle 2, du mouvement de roulement sans glissement des deux cercles l'un sur l'autre (voir figure). L'intersection des surfaces conjuguées avec le plan perpendiculaire aux axes des engrenages s'appellent les profils conjugués.

### 2-2 Le profil en développante de cercle

Soit un cylindre de révolution  $C_1$  d'axe  $X_1$ . On prend comme surface  $P$ , un plan  $P$  tangent selon la génératrice  $D$  à  $C_1$ , et comme surface  $Q$ , un plan  $Q$  parallèle à  $X_1$  et incliné d'un angle  $\theta$  sur le plan  $P$  (voir figure 3, représentée dans le plan normal à  $X_1$ ).

On démontre que la courbe  $s_1$  enveloppée par  $Q$  quand  $P$  roule sans glisser sur le cylindre est une développante de cercle ; en effet, à  $Q$  on peut lier un plan confondu  $Q'$  perpendiculaire au plan  $P'$  et passant toujours par le point  $I$ . On voit que le plan  $Q'$  roule sans glisser sur le cylindre dit de base  $C'_1$  de centre  $O_1$  et de rayon  $rb_1 = r_1 \cos \alpha$ .

Tout se passe comme si la trace de  $P'$  dans le plan perpendiculaire à  $X_1$  roulait sans glisser sur un cercle de base de rayon  $rb_1 = r_1 \cos \alpha$  et entraînait  $Q'$ . La courbe enveloppe de  $Q'$  est un arc de développante de cercle de rayon  $rb_1$  (cercle de base).



D'où

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{rb_2}{rb_1}.$$

On met ainsi en évidence par cette formule, une propriété fondamentale des engrenages en développante de cercle : le rapport des vitesses angulaires des deux roues dentées de l'engrenage ne dépend que des rayons  $rb_1$  et  $rb_2$  des cercles de base ; il est indépendant de l'entraxe de fonctionnement à condition que celui-ci permette le fonctionnement).

*Equation de la développante de cercle (figure 4)*

En utilisant le roulement sans glissement en  $T$  du plan  $P'$  sur le cercle de base, on peut écrire :

longueur  $(TM) = \text{arc}(TP)$  c'est-à-dire ici,

$$r_b \tan(\alpha_\rho) = r_b (\theta + \alpha_\rho)$$

soit en posant  $\overline{OM} = \rho \vec{r}$  :

$$\theta = \tan(\alpha_\rho) - \alpha_\rho$$

et finalement :

$$\boxed{\rho = \frac{r_b}{\cos(\alpha_\rho)}}$$

*Propriétés géométriques de la développante de cercle (figure 5) :*

- une développante de cercle est caractérisée par le rayon du cercle de base,
- toutes les développantes d'un même cercle sont des courbes parallèles,
- pour un fonctionnement sans frottement l'action de **1** sur **2** est un glisseur de module fixe si le couple transmis est constant et d'axe central fixe  $(I, \vec{u})$ .

Pour assurer la continuité de l'engrènement il est nécessaire d'avoir une succession de profils conjugués, la distance entre deux profils consécutifs doit être constante et égale pour les deux roues dentées ; cette distance, caractéristique de l'engrènement, est appelé le pas de base  $\rho_b$

$$\text{On a : distance } (MN) = \text{arc}(A_1B_1) = \text{arc}(A_2B_2) = \rho_b = \frac{2\pi r_{b1}}{Z_1} = \frac{2\pi r_{b2}}{Z_2}$$

Où  $Z_1$  et  $Z_2$  sont les nombres de dents des deux roues.

La condition de roulement sans glissement des cercles primitifs donne la relation suivante :

$$\frac{2\pi r_1}{Z_1} = \frac{2\pi r_2}{Z_2} = \frac{2\pi a}{Z_1 + Z_2} = \rho$$

Le paramètre  $\rho$  est une caractéristique du fonctionnement de l'engrenage, il est appelé **pas** de fonctionnement ; nous pouvons définir le **module**  $m$  de fonctionnement :

$$r_1 = \frac{mZ_1}{2}, r_2 = \frac{mZ_2}{2}, a = \frac{m(Z_1 + Z_2)}{2}$$

*Propriétés cinématiques*

Au point de contact  $M$  du segment  $[H_1, H_2]$  nous pouvons calculer la vitesse relative des deux profils en contact en utilisant le roulement sans glissement de **2** par rapport à **1** au point  $I$  :

$$\vec{v}(M, 2/1) = \vec{v}(I, 2/1) + \vec{\omega}(2/1) \wedge \vec{IM}, \quad \vec{IM} = \lambda \vec{u}, \quad \vec{\omega}(2/1) = (\omega(2/0) - \omega(1/0)) \vec{z}$$

$$\vec{IM} = \lambda \vec{u}, \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{v}(M, 2/1) = \lambda (\omega(2/0) - \omega(1/0)) \vec{v}}$$

Le module de la vitesse de glissement au point de contact  $M$  augmente lorsque le point  $M$  s'éloigne du point  $I$ . De plus cette vitesse de glissement change de signe lorsque  $M$  passe par  $I$ . Ainsi en prenant en compte le frottement au contact des dentures, la composante tangentielle (portée par  $\vec{v}$ ) de l'action de la roue **1** sur la roue **2**, change de signe au point  $I$ . Ceci peut être générateur de vibrations et entraîner la rupture du film d'huile. Pour limiter la durée de vie de l'engrenage, il est nécessaire d'utiliser une lubrification adaptée et de limiter cette vitesse de glissement.

### 3- Fabrication des engrenages

- **Par moulage** : au sable, pour solides en fonte ou en acier, sous pression pour roues en alliages légers, ou matières plastiques. Les dentures sont très souvent achevées sur une machine à tailler.
- **Par forgeage** : il donne également des dentures brutes.
- **Par taillage** : 1- *taillage successif* : les dents sont

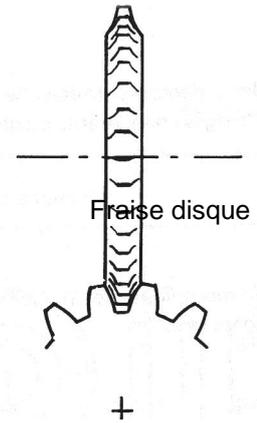


Figure 6

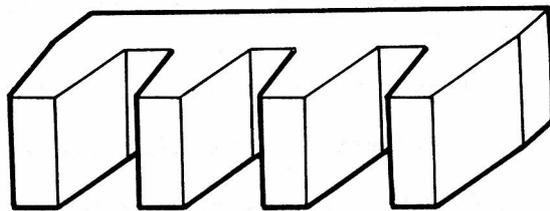


Figure 6 Outil crémaillère

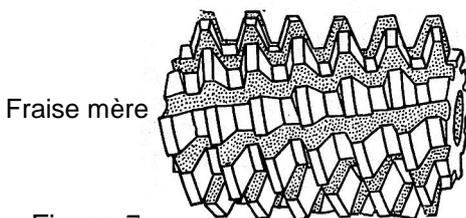


Figure 7

usinées complètement et successivement soit par une fraise de forme (fraise module) (figure 6) ou par génération avec outil crémaillère (figure 7), ou encore par génération avec outil-pignon.

2- *taillage progressif* : à chaque instant toutes les dents à tailler sont à peu près dans le même état dans la

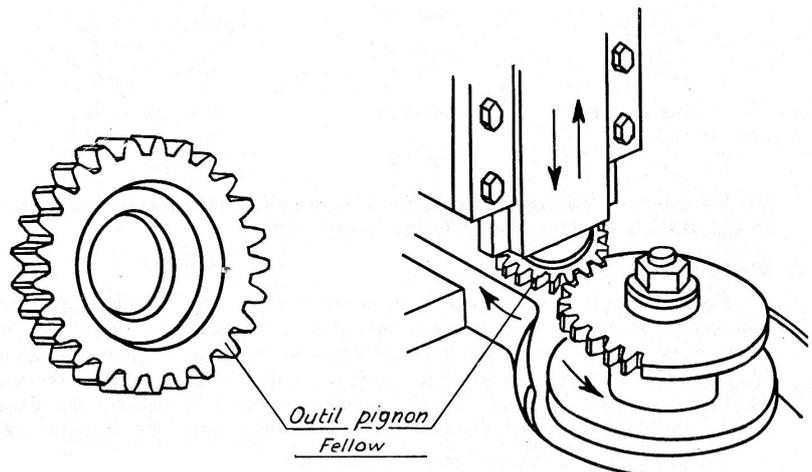


Figure 8

génération par vis mère.

#### 4- Caractérisation des engrenages cylindriques à denture droite.

##### Définitions

**Cylindre primitif de fonctionnement ; diamètre primitif  $d$**  : cylindre décrit par l'axe instantané de rotation du mouvement relatif de la roue conjuguée par rapport à la roue considérée. La section droite du cylindre primitif donne le cercle primitif de diamètre  $d$ .

**Cylindre de tête ; diamètre de tête  $d_a$**  : cylindre enveloppe du sommet des dents. La section droite du cylindre de tête donne le cercle de tête de diamètre  $d_a$ .

**Cylindre de pied ; diamètre de pied  $d_f$**  : cylindre enveloppe du fond des dents. La section droite du cylindre de pied donne le cercle de pied de diamètre  $d_f$ .

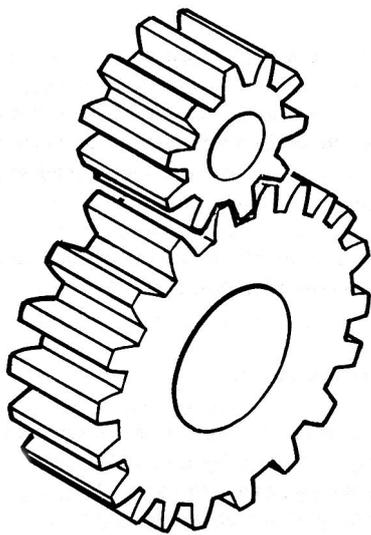


Figure 9

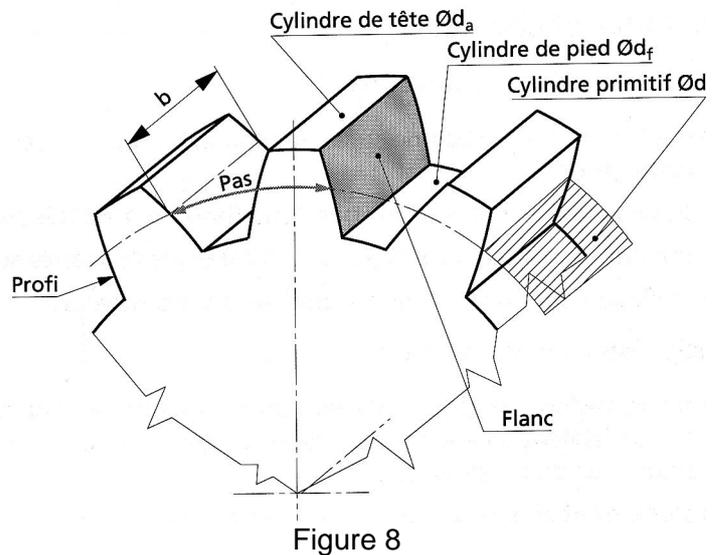


Figure 8

**Saillie  $h_a$**  : distance radiale entre le cylindre de tête et le cylindre primitif.

**Creux  $h_f$**  : distance radiale entre le cylindre de pied et le cylindre primitif.

**Hauteur de dent  $h$**  : distance radiale entre le cylindre de tête et le cylindre de pied.

**Flanc** : portion de surface d'une dent comprise entre le cylindre de tête et le cylindre de pied.

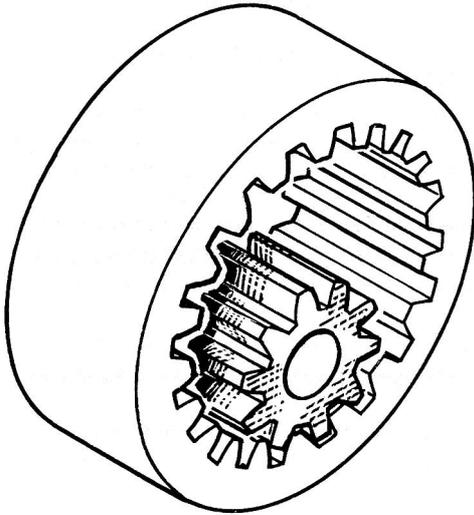
**Profil** : section d'un flanc par un plan normal à l'axe.

**Pas** : longueur d'un arc de cercle primitif compris entre deux profils consécutifs.

**Largeur de denture  $b$**  : largeur de la partie dentée d'une roue mesurée suivant une génératrice du cylindre primitif.

**Entraxe entre deux roues  $a$**  : plus courte distance entre les axes des deux roues.

**Cercle de base** : cercle permettant d'obtenir le profil en développante de cercle des dents.



**Ligne d'action** : normale commune à deux profils de dents conjuguées, en leur point de contact. Cette ligne est fixe pour les engrenages à développante de cercle.

**Angle de pression  $\alpha$**  : angle de la ligne d'action avec la tangente aux cercles primitifs ( $\alpha = 20^\circ$  pour une denture normalisée).

**Module  $m$**  : valeur permettant de définir les caractéristiques dimensionnelles de la roue dentée. C'est le rapport entre le diamètre primitif et le nombre de dents.

Figure 10

Désignation	Symbole	Formule
Module	$m$	Par un calcul de RDM
Nombre de dents	$Z$	Par un rapport de vitesse
Diamètre primitif	$d$	$d = mZ$
Diamètre de tête	$d_a$	$d_a = d + 2m$
Diamètre de pied	$d_f$	$d_f = d - 2,5m$
Saillie	$h_a$	$h_a = m$
Creux	$h_f$	$h_f = 1,25m$
Hauteur de dent	$h$	$h = 2,25m$
Pas	$p$	$p = \pi m$
Largeur de denture	$b$	$b = km \ (5 \leq k \leq 16)$
Entraxe	$a$	$a = (d_1 + d_2)/2$

Les roues extérieures tournent en sens contraires alors que pour un engrenage intérieur, les deux roues tournent dans le même sens. Le taillage des dentures est plus délicat dans ce dernier cas et le plus souvent, la roue est en deux parties : une couronne dentée rapportée sur un plateau à moyeu. L'assemblage de ces deux pièces peut prendre des formes variables, mais doit comporter un centrage précis.

### 5- Caractérisation des engrenages cylindriques à denture hélicoïdale.

Les engrenages à denture hélicoïdale permettent un fonctionnement plus silencieux que celui des engrenages à denture droite ; ils présentent également un meilleur rendement. Ils

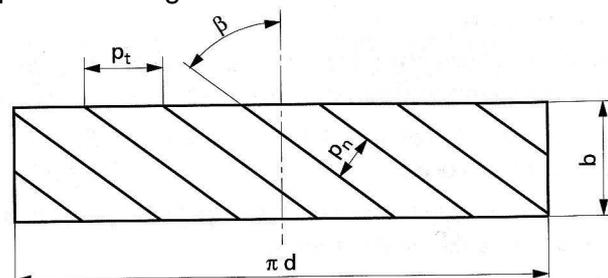


Figure 12

sont notamment utilisés dans les boîtes de vitesses d'automobiles, les réducteurs et les multiplicateurs de vitesses.

Remarquons que l'étude faite au début sur le profil en développante de cercle pour un engrenage à denture droite, se réalise de la même manière pour un engrenage à denture hélicoïdale. Il suffit de prendre un plan  $Q$  faisant un angle  $\beta$  avec la génératrice  $D$  de contact des cylindres primitifs.



Figure 1311

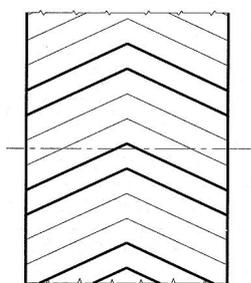


Figure 13

Quel que soit le diamètre, les roues dentées à denture hélicoïdale de **même module** et de **même angle** d'hélice engrènent entre elles, à condition que les hélices soient de **sens contraire** (figure 13). Les dentures hélicoïdales provoquent une poussée axiale, d'où la nécessité de l'emploi de butées. La poussée axiale est proportionnelle à l'angle d'hélice  $\beta$ . On peut donc réduire la poussée axiale en diminuant l'angle d'hélice, mais on peut également la supprimer, en utilisant des roues jumelées dont les dentures sont inclinées en sens opposé (figure 14) ou encore par l'utilisation d'une denture en chevrons (figure 15).

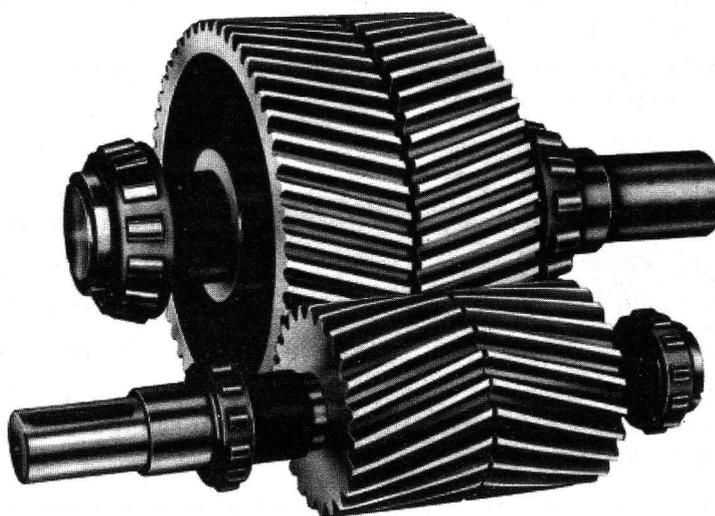


Figure 12

#### Définitions

**Hélice primitive** : intersection d'un flanc avec le cylindre primitif d'une roue hélicoïdale.

**Angle d'hélice  $\beta$**  : angle entre la tangente à l'hélice primitive et une génératrice du cylindre primitif.

**Pas apparent  $p_t$**  : longueur de l'arc de cercle primitif compris entre deux profils homologues consécutifs.

**Pas réel  $p_n$**  : pas mesuré sur une hélice normale à l'hélice primitive.

**Module apparent  $m_t$**  : rapport entre le pas apparent et le nombre de dents.

**Module réel  $m_n$**  : rapport entre le pas réel et le nombre de dents.

Désignation	Symbole	Formule
Module réel	$m_n$	Par un calcul de RDM
Nombre de dents	$Z$	Par un rapport de vitesse
Angle d'hélice	$\beta$	Entre 20° et 30°
Module apparent	$m_t$	$m_t = m_n / \cos \beta$
Pas apparent	$p_t$	$p_t = p_n / \cos \beta$
Pas réel	$p_n$	$p_n = \pi m_n$
Diamètre primitif	$d$	$d = m_t Z$
Diamètre de tête	$d_a$	$d_a = d + 2m_n$
Diamètre de pied	$d_f$	$d_f = d - 2,5m_n$
Saillie	$h_a$	$h_a = m_n$
Creux	$h_f$	$h_f = 1,25m_n$
Hauteur de dent	$h$	$h = 2,25m_n$
Largeur de denture	$b$	$b \geq \pi m_n / \sin \beta$
Entraxe	$a$	$a = (d_1 + d_2) / 2$

## 6- Caractérisation des engrenages coniques.

Les engrenages coniques sont des engrenages à axes concourants. Ils permettent de transmettre le mouvement entre deux arbres concourants, avec un rapport de vitesse rigoureux. Les conditions d'engrènement imposent que les deux roues doivent avoir même module et que les sommets des deux cônes soient confondus. Ce dernier impératif oblige le concepteur à un centrage très précis des deux roues pour assurer un fonctionnement correct. Il faut donc prévoir au montage un réglage axial des deux roues. On peut utiliser par exemple des boîtiers et des cales de réglage.

### Définitions

**Cône primitif, angle primitif  $\delta$**  : cône décrit par l'axe instantané de rotation du mouvement relatif de la roue conjuguée par rapport à la roue considérée. Le demi-angle au sommet de ce cône est l'angle primitif  $\delta$ .

**Cône de tête, angle de tête  $\delta_a$**  : cône enveloppe des sommets des dents. Le demi-angle au sommet de ce cône est l'angle de tête  $\delta_a$ .

**Cône de pied, angle de pied  $\delta_f$**  : cône enveloppe des bases des dents. Le demi-angle au sommet de ce cône est l'angle de pied  $\delta_f$ .

**Cône complémentaire** : cône dont les génératrices sont perpendiculaires à celles du cône primitif, à l'extrémité externe de la largeur de la denture.

**Diamètre primitif  $d$**  : diamètre du cercle intersection du cône primitif et du cône complémentaire (cercle primitif).

**Diamètre de tête  $d_a$**  : diamètre du cercle intersection du cône de tête et du cône complémentaire (cercle de tête).

**Diamètre de pied  $d_f$**  : diamètre du cercle intersection du cône de pied et du cône complémentaire (cercle de pied).

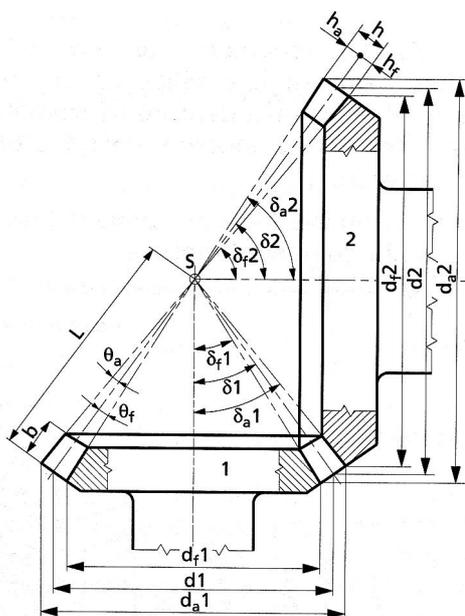


Figure 14

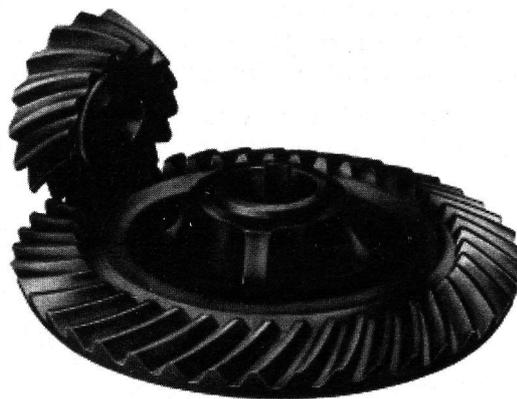


Figure 15

**Largeur de denture  $b$**  : largeur de la partie dentée de la roue mesurée suivant une génératrice du cône primitif.

**Saillie  $h_a$**  : distance entre le cercle primitif et le cercle de tête mesurée suivant une génératrice du cône complémentaire.

**Creux  $h_f$**  : distance entre le cercle primitif et le cercle de pied mesurée suivant une génératrice du cône complémentaire.

**Angle de saillie  $\theta_a$**  : différence entre l'angle de tête et l'angle primitif.

**Angle de pied  $\theta_f$**  : différence entre l'angle de pied et l'angle primitif.

Désignation	Symbole	Formule
Module	$m$	Par un calcul de RDM
Nombre de dents	$Z$	Par un rapport de vitesse
Angle primitif	$\delta$	$\tan \delta_1 = Z_1/Z_2$
Diamètre primitif	$d$	$d_1 = mZ_1$ et $d_2 = mZ_2$
Largeur de denture	$b$	$b = km$ ( $5 \leq k \leq 16$ )
Diamètre de tête	$d_a$	$d_{a1} = d_1 + 2m \cos \delta_1$
Diamètre de pied	$d_f$	$d_{f1} = d_1 - 2,5m \cos \delta_1$
Saillie	$h_a$	$h_a = m$
Creux	$h_f$	$h_f = 1,25m$
Hauteur de dent	$h$	$h = 2,25m$
Angle de saillie	$\theta_a$	$\theta_a = m/L$
Angle de creux	$\theta_f$	$\theta_f = 1,25m/L$
Angle de tête	$\delta_a$	$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_a$
Angle de pied	$\delta_f$	$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_f$

**Pas** : longueur de l'arc de cercle primitif compris entre deux profils homologues consécutifs.

**Hauteur de dent** : distance entre le cercle de tête et le cercle de pied, mesurée suivant une génératrice du cône complémentaire.

## 7- Caractérisation d'un engrenage gauche : le système roue-vis sans fin

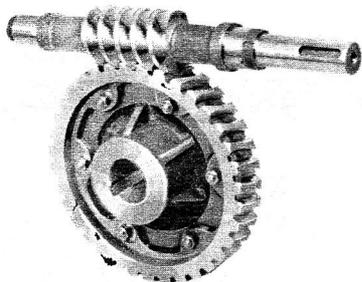


Figure 16

C'est un engrenage hélicoïdal dont les axes sont orthogonaux et non concourants. La transmission par ce type d'engrenage donne une solution simple pour les grands rapports de réduction, avec un fonctionnement peu bruyant. La poussée de la vis est forte surtout si la démultiplication est grande. On utilise alors une butée à billes ou à rouleaux ou encore des roulements à contact oblique pour réaliser la liaison pivot avec le support. Lorsque l'inclinaison des filets est faible (vis à un filet), la transmission est irréversible, ce qui est souvent utile, car le réducteur s'oppose à toute rotation commandée par la machine réceptrice (exemple : appareils de levage). Toutefois le rendement est alors faible,

et de plus le couple de démarrage est beaucoup plus fort que le couple à vitesse de régime. Le rendement est meilleur avec les fortes inclinaisons, à condition que les métaux en présence soient bien choisis et l'exécution des dentures très précises, avec des états de surface très soignés.

Le frottement est important et donne un rendement médiocre, mais suffisant dans le cas de faibles puissances

### Définitions

- Pour la vis,

**Filet** : une des dents de la vis. Les vis peuvent avoir un ou plusieurs filets.

**Cylindre de référence** : surface primitive de référence de la vis.

**Hélice de référence** : hélice d'intersection d'un flanc avec le cylindre de référence de la vis.

**Pas hélicoïdal**  $p_z$  : distance axiale entre deux profils homologues consécutifs d'un filet.

**Pas axial**  $p_x$  : rapport entre le pas hélicoïdal et le nombre de filets (le pas axial est égal au pas hélicoïdal si le nombre de filets est égal à 1).

**Module axial**  $m_x$  : rapport entre le pas et le nombre  $\pi$ .

- Pour la roue,

Le profil de la roue est le profil conjugué de celui de la vis. L'engrènement d'une vis avec une roue n'est possible que si elles ont même module axial et même angle d'hélice. Les caractéristiques dimensionnelles de la roue sont identiques à celles d'une roue à denture hélicoïdale. La roue est généralement cylindrique pour transmettre des efforts relativement faibles, mais pour transmettre des efforts importants, une roue creuse est préférable.

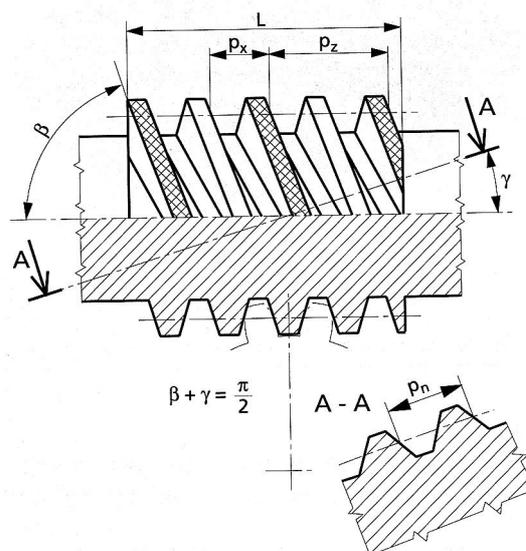


Figure 17

Désignation	Symbole	Formule
Module réel	$m_n$	Par un calcul de RDM
Nombre de filets	$Z$	Déterminé par le rapport des vitesses
Angle d'hélice	$\beta$	Déterminé pour l'irréversibilité ( $\gamma < 5^\circ, \beta + \gamma = 90^\circ$ )
Module axial	$m_x$	$m_x = m_n / \cos \gamma$
Pas axial	$p_x$	$p_x = p_n / \cos \gamma$
Pas réel	$p_n$	$p_n = \pi m_n$
Pas de l'hélice	$p_z$	$p_z = p_x Z$
Diamètre primitif	$d$	$d = p_z / \pi \tan \gamma$
Diamètre extérieur	$d_a$	$d_a = d + 2m_n$
Diamètre intérieur	$d_f$	$d_f = d - 2,5m_n$
Longueur de la vis	$L$	$4p_x < L < 6p_x$

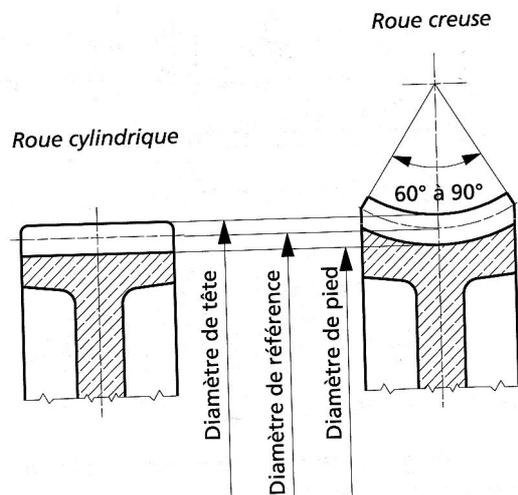


Figure 18